Universidade de São Paulo em São Carlos — Lista 4, resolver até 11.3.2016

FCM0114 Eletromagnetismo

Nome:

1. **Tensor de Levi-Civita e tautologias vetoriais (H21)**

Sejam Ψ e Φ campos escalares e $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ campos vetoriais. Mostre as seguintes identidades com a ajuda do símbolo de Kronecker:
a. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$,
b. $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$,
c. $\nabla \cdot (\nabla\Phi) = \Delta\Phi$,
d. $\nabla\,(\Psi\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla\Psi + \Psi\nabla \cdot \mathbf{A}$,
e. $\nabla \cdot (\Psi\nabla\Psi) = \Psi\Delta\Psi + (\nabla\Psi)^2$
f. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$,
g. $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$,
h. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$.

2. **Integral de caminho e trabalho**

Seja dado um campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 z\hat{\mathbf{e}}_z$. Uma carga $+q$ seja deslocada numa linha reta do ponto $(0,0,0)$ até o ponto $(1,1,1)$.
a. Escreve uma parametrização da trajetória.
b. Calcule o trabalho gastada nesta carga explicitamente ao longo da integral de caminho $W = q\int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$.
c. Calcule o trabalho pelo potencial ϕ.

3. **Integral de caminho e trabalho**

Seja dado um campo $\mathbf{E}$ dependendo de z da maneira seguinte $\mathbf{E} = E_0 z\hat{\mathbf{e}}_z$. A carga q seja movimentada numa trajetória em forma de espiral $\mathbf{r}(t)$ com o raio R

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ \frac{h}{6\pi}t \end{pmatrix}$$

entre $z = 0$ até $z = h$. Faz um esquema de $\mathbf{r}(t)$. Calcule o trabalho gasto na carga explicitamente pela integral de linha $W = q\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$. Como podemos calcular o trabalho mas facilmente?

4. **Integral de caminho e trabalho**

Calcule a integral de caminho do campo $\Phi = x^2\hat{\mathbf{e}}_x + 2yz\hat{\mathbf{e}}_y + y^2\hat{\mathbf{e}}_z$ à partir da origem até o ponto $(1, 1, 1)$ para três caminhos diferentes:
a. Para o caminho $(0, 0, 0) \longrightarrow (1, 0, 0) \longrightarrow (1, 1, 0) \longrightarrow (1, 1, 1)$;
b. para o caminho $(0, 0, 0) \longrightarrow (0, 0, 1) \longrightarrow (0, 1, 1) \longrightarrow (1, 1, 1)$;
c. em linha reta.

5. **Parametrização de curvas**

O movimento de um ponto de massa é dado em coordenadas cartesianas pelo vetor $\mathbf{r}(t) = (\rho\cos\phi(t), \rho\sin\phi(t), z_0)$ com $\rho = vt$ e $\phi = \omega t + \phi_0$. Qual é a figura geométrica tracejada pelo movimento? Exprime a velocidade $\dot{\mathbf{r}}(t)$ e a aceleração $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ em coordenadas cartesianas. Calcule $|\mathbf{r}(t)|^2$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2$,$\mathbf{r}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t)$ e $\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)$.

6. **Integrais de superfície**

Dado seja o campo vetorial $\mathbf{A} = zy\hat{\mathbf{e}}_x + y^3\sin^2 x\hat{\mathbf{e}}_y + xy^2e^z\hat{\mathbf{e}}_z$. Calcule as integrais $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F}$ sobre o triângulo $(0, 0, 0) \to (0, 3, 0) \to (0, 0, 3) \to (0, 0, 0)$, e sobre o retângulo $(2, 2, 0) \to (2, 4, 0) \to (4, 4, 0) \to (4, 2, 0) \to (2, 2, 0)$.